CONTRÔLE HORS-CLASSEMENT
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
INFORMATIQUE – COURS INF 431

FRÉDÉRIC MAGNIEZ ET JEAN-JACQUES LÉVY

Attention : On attachera une grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Le sujet étant trop long, la 4ème partie est optionnelle.

La compagnie d'électricité veut distribuer l'électricité dans un nouveau territoire en minimisant la quantité de cable à tirer entre les emplacements des sources d'énergie et des différents clients à desservir.

1. Modélisation du problème

On modélise ce problème en considérant un graphe non-orienté et valué $G = (V, E, d)$. Les emplacements des centrales et des clients constituent les sommets V de ce graphe G ; les cables à tirer entre deux sommets proches en sont les arcs a, avec une longueur associée $d(a)$ ($d(a) > 0$) comme sur la figure 1a. On suppose le graphe G connexe.

Le problème consiste à trouver un arbre de recouvrement minimal pour G, c'est-à-dire un arbre de recouvrement dont la somme des longueurs de ses branches est minimale.

L'algorithme glouton de Prim construit progressivement l'arbre de recouvrement minimal en partant d'un sommet arbitraire, et en ajoutant, à tout moment, un arc de longueur minimale vers un sommet qui n'appartient pas encore à l'arbre de recouvrement. Quand on a atteint tous les sommets du graphe, l'algorithme se termine (cf. la figure 1b).

Question 1 Montrer les différentes étapes de construction d'un arbre de recouvrement minimal à partir du sommet 0 sur le graphe de la figure 1a.

Question 2 Montrer que si on considère une partition des sommets du graphe G en deux sous-ensembles disjoints X et $V - X$, tout arbre de recouvrement minimal contient forcément un arc de longueur minimal reliant un sommet de X et un sommet de $V - X$.
(Indication : montrer que, si ce n'est pas le cas, on peut remplacer un des arcs de l'arbre de recouvrement reliant ces deux sous-ensembles par un arc de longueur plus petite les reliant.)

Question 3 Montrer que l'algorithme de Prim trouve un arbre de recouvrement minimal.

Date: 12 avril 2005.

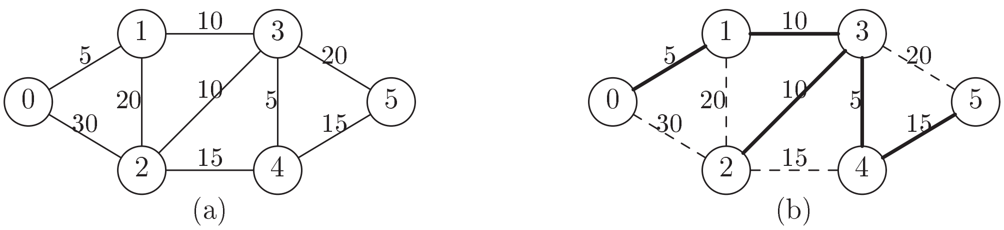


Fig. 1. (a) Graphe non-orienté et valué ; (b) Arbre de recouvrement minimal.

2. Représentation des données

Les arcs sont représentés par des objets avec trois champs : `org` pour désigner le sommet origine de l'arc, `dst` pour son sommet destination, `longueur` pour sa longueur. Dans le graphe non-orienté G, s'il existe un arc a de x à y, il existe aussi un arc b de y à x de même longueur. Le graphe G est représenté par un tableau de successeurs ; plus exactement, la liste `succ`$[x]$ est la liste des arcs dont l'origine est x.

On a donc les classes suivantes :

```
class Arc {
  int org, dst, longueur;
  Arc (int x, int y, int w) {
    org = x; dst = y; longueur = w;
} }
```

```
class Liste {
  Arc val; Liste suivant;
  Liste (Arc a, Liste ls) {
   val = a; suivant = ls;
} }
```

```
class Graphe {
  Liste succ[ ];
  ...
}
```

L'arbre de recouvrement minimal se construit progressivement en maintenant sa *frontière* f, c'est-à-dire un ensemble d'arcs dont l'origine est dans l'arbre de recouvrement et la destination n'est pas dans l'arbre de recouvrement. En outre, on s'arrange pour que, pour toute paire d'arcs distincts a et b dans f, les destinations sont aussi distinctes. Cette frontière est représentée par la classe suivante :

```
abstract class Frontiere {
  abstract void ajouter (Arc a);
  abstract void majAvec (Arc a);
  abstract Arc extraireMin();
}
```

La classe `Frontiere` contient deux méthodes : `ajouter`(a) pour ajouter un nouvel arc a dans la frontière ; `extraireMin`() qui retourne et supprime l'arc a de longueur minimum dans la frontière. Une troisième méthode `majAvec`(a) met à jour dans f l'arc b de même destination que celle de a, en ne gardant, dans f, que celui de a ou de b qui a la plus petite longueur.

On considère une sous-classe `FrontiereSeq` qui implémente la frontière en la représentant par la liste $\langle a_1, a_2, \ldots a_k \rangle$ des arcs qu'elle contient. Le champ `elts` de `FrontiereSeq` désigne cette liste. Pour accélérer, l'opération de mise à jour, un autre champ `pos` est un tableau qui donne, pour tout sommet x du graphe G, la position, dans cette liste, de l'arc a dont la destination est x. On a donc `pos`$[x] = \langle a, a_{i+1}, a_{i+2} \ldots a_k \rangle$. (Cette optimisation est facultative.)

A présent, on écrit les différentes méthodes manipulant la frontière :

Question 4 Définir cette classe `FrontiereSeq` qui implémente la classe `Frontiere`. Donner son constructeur `FrontiereSeq`(n) en supposant que le graphe contient n sommets ($n > 0$).

Question 5 Écrire la méthode `ajouter`(a) qui ajoute l'arc a à la frontière. (On suppose que le sommet destination de a n'est pas la destination d'un autre arc b déjà présent dans la frontière) Quelle est la complexité en temps de cette fonction ?

Question 6 Écrire la méthode `majAvec`(a) qui met à jour la frontière avec l'arc a. (On suppose que le sommet destination de a est la destination d'un autre arc b présent dans la frontière) Quelle est la complexité en temps de cette fonction ?

Question 7 Écrire la méthode `extraireMin`() qui retourne l'arc de longueur minimale dans la frontière et l'enlève de la frontière. Quelle est la complexité en temps de cette fonction ?

3. Résolution du problème

L'arbre de recouvrement minimal est représenté par un tableau $p[\,]$ tel que $p[y] = x$ si le sommet x est le père de y dans l'arbre de recouvrement ($0 \leq y < n$). Pour la racine r, on pose $p[r] = -1$.

Question 8 Écrire la fonction statique `mst`(G) dans la classe `Graphe` qui retourne un arbre de recouvrement minimal de G. Quelle est la complexité en temps de cette fonction ?

Question 9 Comment représenter la frontière pour améliorer la complexité en temps de `mst` ?

Question 10 Comment modifier `mst`(G) pour obtenir une forêt de recouvrement minimale quand G n'est pas connexe ?

4. Programmation par objets

La direction informatique de la compagnie d'électricité exige « un style de programmation plus moderne », c'est-à-dire une programmation par objets. Nous changeons donc la représentation des ensembles d'arcs en utilisant un type disjonctif distinguant la classe `Vide` pour représenter l'ensemble vide et la classe `NonVide` pour représenter des ensembles non vides. Ces deux classes sont des sous-classes de la classe des ensembles d'arcs suivante :

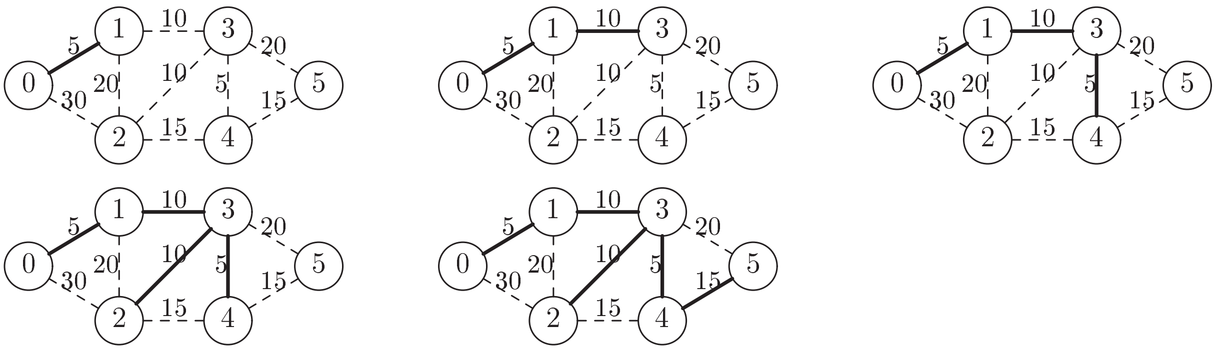
```
abstract class Ensemble {
  abstract Ensemble ajouter (Arc a);
  abstract Ensemble enlever (Arc a);
  abstract Arc minimum();
}
```

où l'expression e.`ajouter`(a) ajoute l'arc a à l'ensemble e ; où e.`enlever`(a) retire l'arc a de l'ensemble e ; et où e.`minimum`() retourne un arc de longueur minimale appartenant à l'ensemble e.

La frontière est à présent représentée par une sous-classe `FrontiereSeqEns` de `Frontiere`, qui utilise les méthodes de la classe `Ensemble`.

Question 11 Écrire les méthodes des classes `Vide`, `NonVide` et `FrontiereSeqEns` permettant de gérer la frontière comme dans la classe `FrontiereSeq`.

Question 1



Question 2 Remarquons d'abord les deux points suivants. Soient T un arbre de recouvrement de G et a un arc de G qui n'est pas dans T. Si a est ajouté à T, le graphe T' obtenu contient un unique cycle C., Deuxièmement, si un arc quelconque du cycle C est supprimé dans T', le graphe obtenu T'' est à nouveau un graphe de recouvrement.

Appelons *mst* un arbre de recouvrement minimal de G. Soit M un mst de G ne contenant pas d'arc a de longueur minimale entre X et $V - X$.

Appliquons les deux remarques préliminaires. Si a est ajouté à M, un cycle est créé. Ce cycle contient un autre arc b reliant X et $V - X$. En supprimant b, un nouvel arbre de recouvrement est créé, dont la somme des longueurs est plus petite : contradiction.

Question 3 Lorsque les longueurs des arcs ne sont pas toutes deux à deux distinctes, nous avons besoin du résultat suivant du même type que celui de la question précédente.

> Soit S l'ensemble des arcs de longueur minimale reliant un sommet de X et un sommet de $V - X$. Alors, tout mst M peut être modifié en ajoutant arbitrairement un arc de $S - M$ et en supprimant un arc de $M \cap S$ bien choisi.

Pour le voir, il suffit d'appliquer la méthode précédente. En ajoutant un arc a de $S - M$ un cycle est créé. Pour le défaire on enlève un autre arc b du cycle entre X et $V - X$. La longueur de b est nécessairement plus grande ou égale à celle de a. Mais puisque M était déjà de longueur minimale, nécessairement les arcs a et b sont de même longueur. Le nouvel arbre de recouvrement a la même longueur que M qui est donc toujours minimale.

Nous allons prouver par induction que l'arbre M_k, obtenu à l'étape k de l'algorithme de Prim, est un préfixe d'un mst de G, pour $k = 0, 1, \ldots, n$.

Soit X_k l'ensemble des k sommets de M_k.

Pour $k = 0$, l'abre M_0 a un seul nœud x, donc il est préfixe de tout mst (contenant forcément x).

Supposons par récurrence, que M_k est le préfixe d'un mst M de G. L'arbre M étant un mst, il contient forcément un arc a de longueur minimale entre entre X_k et $V - X_k$. S'il n'y a qu'un seul arc de longueur minimale entre X_k et $V - X_k$, il s'agit de a, et l'algorithme le trouve et le rajoute à M_k pour former M_{k+1} qui est un préfixe de M, et qui satisfait donc l'hypothèse de récurrence. En cas d'ambiguité, l'algorithme ajoutera un arc b de même longueur que a, obtenant ainsi M_{k+1}. Si b est dans M, on est dans le cas précédent. Sinon, d'après le résultat énoncé en début de question, il est possible de remplacer un arc de M qui est entre X_k et $V - X_k$ par b de telle sorte que l'arbre obtenu M' est toujours un mst. Comme l'arc retiré de M n'était pas dans M_k, l'arbre M_{k+1} est bien préfixe du mst M'

La récurrence est donc finie. Quand $k = n$, l'arbre M_k est donc un mst de G.

Question 4

```
class FrontiereSeq extends Frontiere {
  Liste elts;
  Liste[ ] pos;
  FrontiereSeq (int n) { elts = null ; pos = new Liste[n]; }
  ...
}
```

Question 5 La fonction a une complexité $O(1)$.

```
void ajouter (Arc a) {
  elts = new Liste (a, elts);
  pos[a.dst] = elts;
}
```

Question 6 La fonction a une complexité $O(1)$.

```
void majAvec (Arc a) {
  Liste ls = pos[a.dst];
  if (a.longueur < ls.val.longueur)
    ls.val = a;
}
```

Question 7 La fonction suivante prend un temps $O(k)$ si k arcs dans f.

```
void supprimer (Arc a) {
  elts = enleverArcDans (a, elts);
  pos[a.dst] = null;
}

Liste enleverArcDans (Arc a, Liste ls) {
  if (ls != null) {
    if (ls.val == a) ls = ls.suivant;
    else ls.suivant = enleverArcDans (a, ls.suivant);
  }
  return ls;
}

Arc minimum() {
  if (elts == null) return null;
  else {
    Arc aMin = elts.val;
    for(Liste ls = elts.suivant; ls != null; ls = ls.suivant)
      if (ls.val.longueur < aMin.longueur) aMin = ls.val;
    return aMin;
  }
}

Arc extraireMin() {
  Arc a = minimum();
  supprimer (a);
  return a;
}
```

Question 8 La fonction suivante a une complexité en $O(V^2) + O(E)$, c'est-à-dire $O(V^2) = O(n^2)$.

```
final static int BLANC = 0, GRIS = 1, NOIR = 2;

static int[ ] mst (Graphe g) {
  int n = g.succ.length;
```

```
  int[ ] pere = new int[n];
  int[ ] couleur = new int[n];
  for(int i = 0; i < n; ++i) {
    couleur[i] = BLANC; pere[i] = -1;
  }

  Frontiere f = new FrontiereSeq(n);
  f.ajouter (new Arc(-1, 0, 0));
  for(int i = 0; i < n; ++i) {
    Arc a = f.extraireMin();
    int x = a.dst;
    pere[x] = a.org; couleur[x] = NOIR;
    for (Liste ls = g.succ[x]; ls != null; ls = ls.suivant) {
      Arc b = ls.val; int y = b.dst; // b ARC DE x A y
      if (couleur[y] == BLANC) {
        couleur[y] = GRIS;
        f.ajouter(b);
      }
      else if (couleur[y] == GRIS)
        f.majAvec(b);
    }
  }
  return pere;
}
```

Question 9 On peut utiliser une file de priorité de type tas de sable, et réduire les temps d'extraction du minimum à $O(\log k)$, où k est le nombre d'arcs dans la frontière. Par contre, les temps de mise à jour et d'ajout passent alors de $O(1)$ à $O(\log k)$. D'où un `mst` en $O((E+V)\log V)$.

Remarque : en utilisant des tas de Fibonacci, il serait possible de dessendre les temps de mise à jour et d'ajout à $O(1)$ ce qui donnerait alors $O(E+V\log V)$.

Question 10 Il suffit de changer la condition d'arrêt de `mst`.

```
for (int x = 0; x < n; ++x) {
  if (couleur[i] == BLANC) {
    Frontiere f = new FrontiereSeq(n);
    f.ajouter (new Arc(-1, x, 0));
    Arc a; while ((a = f.extraireMin()) != null) {
      int x = a.dst;
      ...
} } }
```

Question 11

```
class Vide extends Ensemble {
  Ensemble ajouter (Arc a) {return new NonVide (a, this); }
  Ensemble enlever (Arc a) {return this; }
  Arc minimum() { return null; }
}

class NonVide extends Ensemble {
  Arc elt; Ensemble reste;
  NonVide (Arc a, Ensemble e) { elt = a; reste = e; }
  Ensemble ajouter (Arc a) {return new NonVide (a, this); }
  Ensemble enlever (Arc a) {
    if (elt == a) return reste;
    else {reste = reste.enlever (a); return this; }
```

```
  }
  Arc minimum () {
    Arc b = reste.minimum();
    if (b == null || elt.longueur <= b.longueur) return elt;
    else return b;
  }
}

class FrontiereSeqEns extends Frontiere {
  Ensemble arcs;
  Ensemble[ ] pos;

  FrontiereSeqEns (int n) {
    arcs = new Vide() ; pos = new Ensemble[n];
  }

  void ajouter (Arc a) {
    arcs = arcs.ajouter (a);
    pos[a.dst] = arcs;
  }

  void majAvec (Arc a) {
    NonVide e = (NonVide) pos[a.dst];
    if (a.longueur < e.elt.longueur)
      e.elt = a;
  }

  void supprimer (Arc a) {
    arcs = arcs.enlever (a);
    pos[a.dst] = null;
  }

  Arc extraireMin() {
    Arc a = arcs.minimum();
    supprimer (a);
    return a;
  }
```