Inf 431 – Cours 9

Assertions et Programmes

jeanjacqueslevy.net

secrétariat de l'enseignement:
Catherine Bensoussan
cb@lix.polytechnique.fr
Aile 00, LIX,
01 69 33 34 67

www.enseignement.polytechnique.fr/informatique/IF

Plan

1. Correction de programmes itératifs scalaires
2. Terminaison de programmes itératifs
3. Correction de programmes avec des tableaux
4. Logique de Hoare
5. Récursion et assertions
6. Ordres bien-fondés

La suite de Fibonacci (1/6)

- Récurrence linéaire d'ordre 2

  $u_0 = 0$

  $u_1 = 1$

  $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$

  $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, \ldots$

- ```
  static int fib (int n) {
    if (n < 2) return n;
    else return fib (n-1) + fib (n-2);
  }
  ```

- ou en faisant un peu de programmation dynamique

  ```
  static int fib1 (int n) {
    int[ ] res = new int[n+1];
    res[0] = 0; res[1] = 1;
    for (int i=2; i <= n; ++i)
      res[i] = res[i-1]+res[i-2];
    return res[n];
  }
  ```
  ```

La suite de Fibonacci (2/6)

- ou en ne gardant que les deux dernières valeurs x et y

```
static int fibonacci (int n) {
  int x = 0;
  if (n != 0) {
    x = 1; int y = 0;
    for (int k=1; k != n; ++k) {
      int t = y;
      y = x;
      x = x + t;
    }
  }
  return x;
}
```

- On veut montrer que $n \geq 0 \Longrightarrow x = \mathrm{fib}(n)$ à la fin.

La suite de Fibonacci (3/6)

- ou en décomposant l'instruction for.

```
static int fibonacci (int n) {
  int x = 0;
  if (n != 0) {
    x = 1; int y = 0;
    int k = 1;
    while (k != n) {
      int t = y;
      y = x;
      x = x + t;
      ++k;
    }
  }
  return x;
}
```

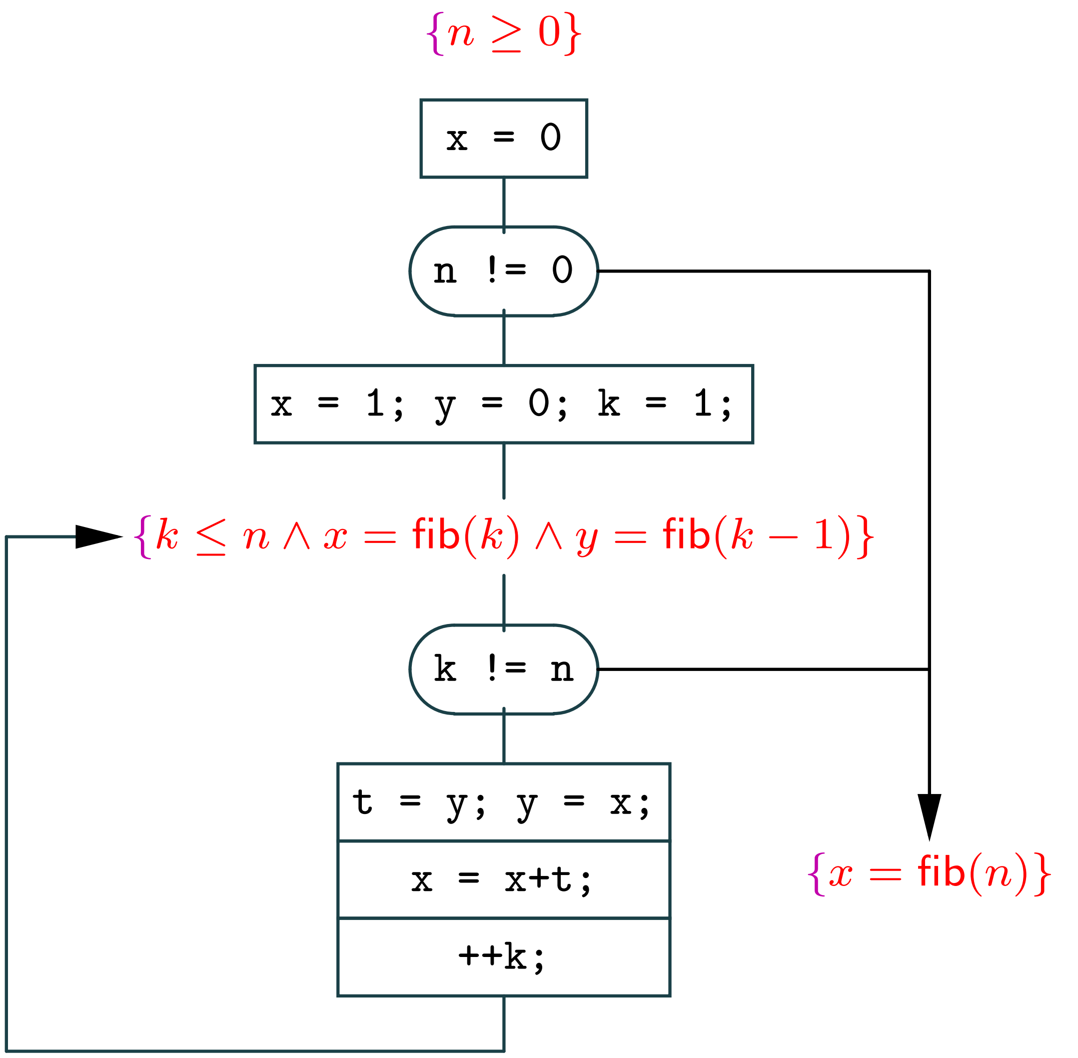
La suite de Fibonacci (4/6)

- static int fibonacci (int n) {
```
  //P ={n ≥ 0}
  int x = 0;
  if (n != 0) {
    x = 1; int y = 0;
    int k = 1;
    //Q ={k ≤ n ∧ x = fib(k) ∧ y = fib(k − 1)}
    while (k != n) {
      int t = y;
      y = x;
      x = x + t;
      ++k;
    }
  }
  //R ={x = fib(n)}
  return x;
}
```

- $\mathcal{P}$ assertion d'entrée
  $\mathcal{Q}$ assertion invariant de boucle
  $\mathcal{R}$ assertion de fin

- Montrer que de $\mathcal{P}$, on peut dériver $\mathcal{R}$.

La suite de Fibonacci (5/6)



La suite de Fibonacci (6/6)

- static int fibonacci (int n) {

  $\{n \geq 0\}$

  int x = 0;

  $\{n \geq 0 \wedge x = 0\}$

  if (n != 0) {

  x = 1; int y = 0;

  $\{n > 0 \wedge x = \mathsf{fib}(1) \wedge y = \mathsf{fib}(0)\}$

  int k = 1;

  $\{k \leq n \wedge x = \mathsf{fib}(k) \wedge y = \mathsf{fib}(k-1)\}$

  while (k != n) {

  $\{k < n \wedge x = \mathsf{fib}(k) \wedge y = \mathsf{fib}(k-1)\}$

  int t = y;

  $\{k < n \wedge x = \mathsf{fib}(k) \wedge y = \mathsf{fib}(k-1) \wedge t = \mathsf{fib}(k-1)\}$

  y = x;

  $\{k < n \wedge x = \mathsf{fib}(k) \wedge y = \mathsf{fib}(k) \wedge t = \mathsf{fib}(k-1)\}$

  x = x + t;

  $\{k < n \wedge x = \mathsf{fib}(k+1) \wedge y = \mathsf{fib}(k) \wedge t = \mathsf{fib}(k-1)\}$

  ++k;

  }

  $\{k = n \wedge x = \mathsf{fib}(k) \wedge y = \mathsf{fib}(k-1)\}$

  }

  $\{x = \mathsf{fib}(n)\}$

  return x;

  }

Le PGCD (1/3)

- Un autre exemple itératif simple :

```
static int pgcd (int a, int b) {
  int x = a, y = b;
  while (x != y)
    if (x > y)
      x = x - y;
    else
      y = y - x;
  return x;
}
```

Le PGCD (2/3)

- ```
  static int pgcd (int a, int b) {
    {a > 0 ∧ b > 0}
    int x = a, y = b;
    {x > 0 ∧ y > 0 ∧ pgcd(x, y) = pgcd(a, b)}
    while (x != y) {
      {x > 0 ∧ y > 0 ∧ x ≠ y ∧ pgcd(x, y) = pgcd(a, b)}
      if (x > y) {
        {x > 0 ∧ y > 0 ∧ x > y ∧ pgcd(x − y, y) = pgcd(a, b)}
        x = x - y;
        {x > 0 ∧ y > 0 ∧ pgcd(x, y) = pgcd(a, b)}
      } else {
        {x > 0 ∧ y > 0 ∧ x < y ∧ pgcd(x, y − x) = pgcd(a, b)}
        y = y - x;
        {x > 0 ∧ y > 0 ∧ pgcd(x, y) = pgcd(a, b)}
      }
    }
    {x > 0 ∧ x = y = pgcd(x, y) = pgcd(a, b)}
    return x;
  }
  ```

Exercice 1 Montrer que le raisonnement n'est plus valide avec $\{a \geq 0 \wedge b \geq 0\}$. Comment corriger le programme ?
  ```

Le PGCD (3/3)

Exercice 2 Faire le raisonnement avec l'algorithme d'Euclide suivant avec $\{a \geq 0 \wedge b \geq 0\}$ comme assertion d'entrée.

```
static int pgcd (int a, int b) {
  int x = a, y = b;
  while (y != 0) {
    int r = x % y;
    x = y;
    y = r;
  }
  return x;
}
```

Exercice 3 Modifier les programmes pour qu'ils acceptent comme assertion d'entrée $\{a \in \mathbf{Z} \wedge b \in \mathbf{Z}\}$.

Assertions

- Les variables d'un programme itératif ont des valeurs modifiables.
- Une assertion est une proposition logique, décrivant une propriété d'un état mémoire des variables.
- Une assertion est attachée à un point d'un programme.
- Pour montrer l'implication de l'assertion de fin à partir de l'assertion d'entrée, on procède par implications successives grâce à des assertions intermédiaires.

Terminaison (1/2)

```
static int fibonacci (int n) {
  {n ≥ 0}
  int x = 0;
  if (n != 0) {
    x = 1; int y = 0;
    int k = 1;
    {Ω(n, k) = n − k}
    while (k != n) {
      int t = y;
      y = x;
      x = x + t;
      ++k;
    }
  }
  {x = fib(n)}
  return x;
}
```

En un tour de boucle comme (n, k) devient $(n, k+1)$, on a $\Omega(n, k) = n - k > n - k - 1 = \Omega(n, k+1)$.

L'instruction while s'arrête donc.

Terminaison (2/2)

```
static int pgcd (int a, int b) {
  {a > 0 ∧ b > 0}
  int x = a, y = b;
  {x > 0 ∧ y > 0 ∧ Ω(x, y) = max(x, y)}
  while (x != y)
    if (x > y)
      x = x - y;
    else
      y = y - x;
  return x;
}
```

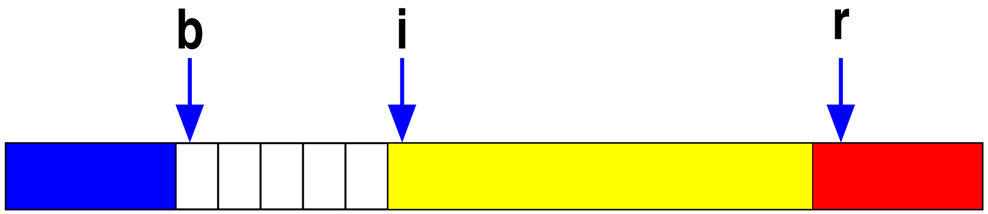
Ici encore en un tour de boucle, si $x > y$, on a
$\Omega(x, y) = \max(x, y) > \max(x - y, y) = \Omega(x - y, y)$

De même, si $x < y$, on a
$\Omega(x, y) = \max(x, y) > \max(x, y - x) = \Omega(x, y - x)$

L'instruction while s'arrête donc.

Exercice 4 Montrer la terminaison de l'algorithme d'Euclide.

Assertions et tableaux (1/3)




```
static void drapeauHollandais (int[ ] a) { [Dijkstra]
  int n = a.length; int b = 0, i = 0, r = n;
  while (i < r) {
    switch (a[i]) {
    case BLEU:
      int t = a[b]; a[b] = a[i]; a[i] = t;
      ++b; ++i;
      break;
    case BLANC:
      ++i;
      break;
    case ROUGE:
      --r;
      int u = a[r]; a[r] = a[i]; a[i] = u;
      break;
    }
  }
}
```

Assertions et tableaux (2/3)

```
static void drapeauHollandais (int[ ] a) {
  int n = a.length; int b = 0, i = 0, r = n;
  {φ(0, b, BLEU) ∧ φ(b, i, BLANC) ∧ φ(r, n, ROUGE) ∧ i ≤ r}
  while (i < r) {
    switch (a[i]) {
    case BLEU:
      {φ(0, b, BLEU) ∧ φ(b, i, BLANC) ∧ φ(r, n, ROUGE) ∧ a[i] = BLEU ∧ i < r}
      int t = a[b]; a[b] = a[i]; a[i] = t;
      {φ(0, b + 1, BLEU) ∧ φ(b + 1, i + 1, BLANC) ∧ φ(r, n, ROUGE) ∧ i < r}
      ++b; ++i; break;
    case BLANC:
      {φ(0, b, BLEU) ∧ φ(b, i + 1, BLANC) ∧ φ(r, n, ROUGE) ∧ i < r}
      ++i; break;
    case ROUGE:
      {φ(0, b, BLEU) ∧ φ(b, i, BLANC) ∧ φ(r, n, ROUGE) ∧ a[i] = ROUGE ∧ i < r}
      --r;
      {φ(0, b, BLEU) ∧ φ(b, i, BLANC) ∧ φ(r + 1, n, ROUGE) ∧ a[i] = ROUGE ∧ i ≤ r}
      int u = a[r]; a[r] = a[i]; a[i] = u;
      break;
  } }
  {φ(0, b, BLEU) ∧ φ(b, r, BLANC) ∧ φ(r, n, ROUGE)}
}
```

où $\phi(i, j, c) = \forall k.\ i \le k < j \Rightarrow a[k] = c$

Assertions et tableaux (3/3)

La terminaison du drapeau hollandais se montre en considérant l'ordinal $\Omega(b, i, r) = r - i$.

Exercice 5 Montrer la correction du tri par sélection suivant :

```
static void triSelection (int[ ] a) {
  int n = a.length;
  for (int i = 0; i < n - 1; ++i) {
    int min = i;
    for (int j = i+1; j < n; ++j)
      if (a[j] < a[min])
        min = j;
    int t = a[min]; a[min] = a[i]; a[i] = t;
  }
}
```

Exercice 6 Montrer la correction du tri par insertion.

Exercice 7 Montrer la correction du tri par bulles.
(cf. cours 1ère année)

Quelques principes logiques

- On a toujours
  $\{P(E)\}$ `x = ` E`;` $\{P(x)\}$

- Pour montrer
  $\{P\}$ if (E) S else S' $\{Q\}$
  il faut montrer
  $\{P \wedge E\}$ S $\{Q\}$
  et
  $\{P \wedge \neg E\}$ S' $\{Q\}$

- Pour montrer
  $\{P\}$ while (E) S $\{Q\}$
  il faut deviner l'invariant I, et montrer $P \Rightarrow I$ et $I \wedge \neg E \Rightarrow Q$ et
  $\{I \wedge E\}$ S $\{I\}$

cf. logique de `Floyd-Hoare`.

Dans le triplet $\{P\}$ S $\{Q\}$, on appelle P et Q des pré-condition et post-condition de S.

Logique de Hoare

$$\frac{}{\{P(E)\}\ \texttt{x = E;}\ \{P(x)\}}$$

$$\frac{\{P \wedge E\}\ \texttt{S}\ \{Q\} \qquad \{P \wedge \neg E\}\ \texttt{S'}\{Q\}}{\{P\}\ \textsf{if}\ \texttt{(E)}\ \texttt{S}\ \textsf{else}\ \texttt{S'}\ \{Q\}}$$

$$\frac{\{P\}\ \texttt{S}\ \{Q\} \qquad \{Q\}\ \texttt{S'}\{R\}}{\{P\}\ \texttt{S}\ \texttt{S'}\{R\}}$$

$$\frac{\{P\}\ \texttt{S}\ \{Q\}}{\{P\}\ \texttt{\{S\}}\ \{Q\}}$$

$$\frac{\{P \wedge E\}\ \texttt{S}\ \{P\}}{\{P\}\ \textsf{while}\ \texttt{(E)}\ \texttt{S}\ \{P \wedge \neg E\}}$$

$$\frac{P \Rightarrow P' \qquad \{P'\}\ \texttt{S}\ \{Q'\} \qquad Q' \Rightarrow Q}{\{P\}\ \texttt{S}\ \{Q\}}$$

Les formules sont des triplets $\{P\}S\{Q\}$.

Les prémisses d'une règle d'inférence sont au dessus de la barre.

La conclusion d'une règle d'inférence est en dessous.

Un axiome est une règle sans prémisse.

Correction partielle – Correction totale

- $\{P\}\ S\ \{Q\}$ vrai montre que si P est vrai, alors Q l'est aussi. Tout dépend donc de ce qu'on veut prouver avec Q. Par exemple, on peut ne s'intéresser qu'à la valeur d'une seule variable, sans se soucier du reste.
- $\{P\}\ S\ \{Q\}$ vrai ne donne aucune indication de terminaison, puisque Q n'est vrai que si S termine. On dit qu'il y a correction partielle.
- seuls des ordinaux Ω qui décroissent dans les boucles assurent la terminaison. Alors on a correction totale.
- assertions $\neq$ spécifications. Faire la correspondance entre spécifications (« le cahier des charges ») et programmes est plus complexe et souvent imprécis.
- la correspondance entre spécifications et programmes peut se faire progressivement : programmation par raffinements successifs (*stepwise refinement*).
- les spécifications sont parfois formelles (B, TLA, Coq, Isabelle, HOL, PVS, etc) ; on peut alors formaliser la correspondance entre spécifications et programmes (« méthodes formelles »).

Implémentation des assertions (1/2)

Java 1.4 : l'instruction `assert` lève `AssertionError` si l'assertion n'est pas vérifiée. Beaucoup de langages ont cette facilité : Caml, C, C++.

- ```
  static void drapeauHollandais (int[ ] a) {
    int n = a.length; int b = 0, i = 0, r = n;
    assert phi(a,0,b,BLEU) && phi(a,b,i,BLANC) && phi(a,r,n,ROUGE)
        && i <= r;
    while (i < r) {
      switch (a[i]) {
      ...
      }
      assert phi(a,0,b,BLEU) && phi(a,b,i,BLANC) && phi(a,r,n,ROUGE);
    }
    assert phi(a,0,b,BLEU) && phi(a,b,r,BLANC) && phi(a,r,n,ROUGE);
  }

  static boolean phi (int[ ] a, int i, int j, int c) {
    return i >= j || a[i] == c && phi(a, i+1, j, c);
  }
  ```
- ```
  javac -source 1.4 DutchFlag.java
  java -enableassertions DutchFlag 0 1 2
  ```

Implémentation des assertions (2/2)

- On peut l'implémenter en Java 1.1.8 par :

```
class AssertionError extends Error { }

public class Assertion {
  public static void check (boolean e) {
    if (!e) throw new AssertionError();
  }
}
```

- On peut passer en argument de `Assertion.check` une expression booléenne quelconque correspondant à l'assertion à tester.
- Bien sûr, les assertions avec des quantificateurs $\forall$ ou $\exists$ sont plus dures à tester !

Récursion et assertions (1/3)

- On veut montrer $\{n \geq 0\}$ `r = fact(n);` $\{fact(n) = n!\}$
  Pour cela, on suppose (comme pour les boucles) que les appels (récursifs) utilisés vérifient déjà cette formule.

- ```
  static int fact (int n) {
    int r;
    {n ≥ 0 ∧ ∀n fact(n) = n! }
    if (n == 0) {
      {n = 0}
      r = 1;
      {n = 0 ∧ r = 1 = 0!}
    } else {
      {n − 1 ≥ 0 ∧ fact(n − 1) = (n − 1)!}
      r = n * fact(n-1);
      {r = n(n − 1)! = n!}
    }
    {r = n!}
    return r;
  }
  ```

- A nouveau, il s'agit de correction partielle.
  Un autre argument montre la terminaison.
  ```

Récursion et assertions (2/3)

- On veut montrer $\{n \geq 0\}$ `r = f(n);` $\{f(n) = \text{if } n > 100 \text{ then } n - 10 \text{ else } 91\}$

- static int f (int n) { // ————————— fonction 91 [McCarthy]

```
  int r;
  {n ≥ 0 ∧ ∀n′ f(n′) = if n′ > 100 then n′ − 10 else 91}
  if (n > 100) {
    {n > 100}
    r = n-10;
    {n > 100 ∧ r = n − 10}
  } else {
    {n ≤ 100 ∧ ∀n′ f(n′) = if n′ > 100 then n′ − 10 else 91}
    r = f(f(n+11));
    {n ≤ 100 ∧ r = Φ(n)}    ↔    {n ≤ 100 ∧ r = 91}
  }
  {r = if n > 100 then n − 10 else 91}
  return r;
}
```

Exécution

$$\begin{aligned}
\Phi(n) &= f(\text{if } n + 11 > 100 \text{ then } n + 1 \text{ else } 91) \\
&= \text{if } n \geq 90 \text{ then } f(n + 1) \text{ else } f(91) \\
&= \text{if } n \geq 90 \text{ then if } n \geq 100 \text{ then } n - 9 \text{ else } 91 \text{ else } 91 \\
&= \text{if } n \geq 100 \text{ then } n - 9 \text{ else } 91
\end{aligned}$$

Récursion et assertions (3/3)

- Considérons l'insertion dans une liste triée

```
static Liste inserer (int x, Liste a) {
  int r;
  if (a == null || x < a.val) {
    r = new Liste(x, a);
  } else if (a.val < x) {
    r = new Liste(a.val, inserer(x, a.suiv));
  } else
    r = a;
  return r;
}
```

- Considérons les propositions

  $\{ord(a) = (a = \mathsf{null} \vee a.suiv = \mathsf{null} \vee a.val < a.suiv.val \wedge ord(a.suiv))\}$

- On cherche à montrer

  $\{ord(a)\}$ `r = inserer(x,a);` $\{ord(inserer(x,a))\}$

Exercice 8 Le démontrer... Indication : se servir de la formule

$\{prem(x,a) = (a = \mathsf{null} \vee inserer(x,a).val = x \vee inserer(x,a).val = a.val)\}$

Ordres bien-fondés et terminaison (1/3)

- Une relation d'ordre (strict) $\prec$ est une relation :

irréflexive	$x \not\prec x$
transitive	$x \prec y \prec z \;\Rightarrow\; x \prec z$

- Un ordre bien fondé est une relation d'ordre qui n'admet pas de chaîne infinie descendante $x_0 \succ x_1 \succ x_2 \succ \cdots x_n \succ \cdots$.

Exemples d'ordre bien fondés

- $\langle \mathbf{N}, < \rangle$
- ordre lexicographique : $\langle \mathbf{N} \times \mathbf{N}, <_{lex} \rangle$

$$(x, y) <_{lex} (x', y') \quad \text{ssi} \quad x < x' \;\vee\; (x = x' \wedge y < y')$$

$(4,3) >_{lex} (4,2) >_{lex} (3,15) >_{lex} (3,6) >_{lex} (3,4) >_{lex} (3,2) >_{lex}$
$(2,21) >_{lex} (2,19) >_{lex} (2,12) >_{lex} (1,90) \ldots$

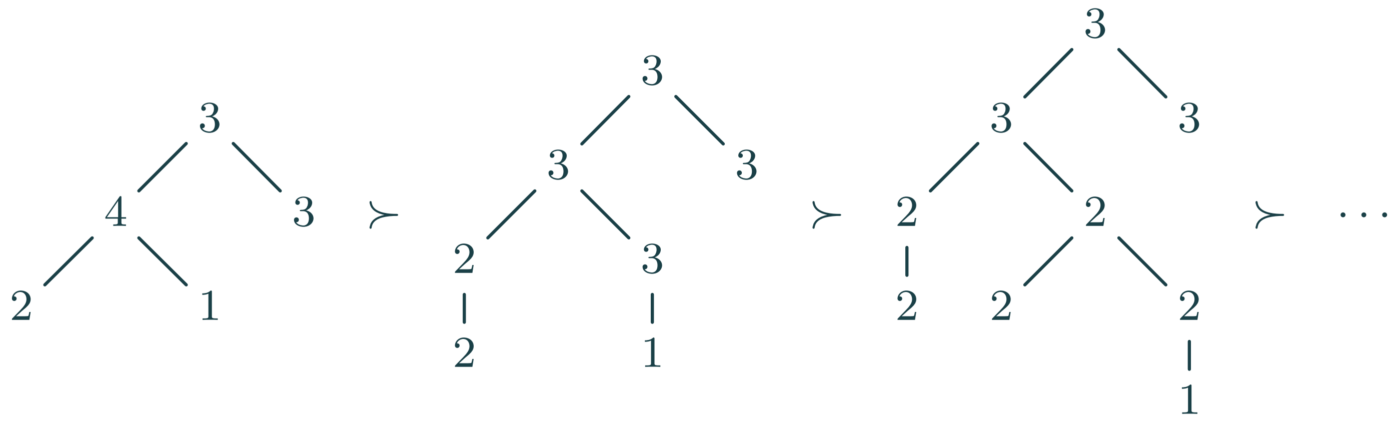
- ordre des multi-ensembles : $\langle \mathcal{P}(\mathbf{N}), <_{mul} \rangle$

$$E <_{mul} E' \quad \text{ssi} \quad E = F \uplus \{y_1, y_2, \ldots y_n\},\; E' = F \uplus \{x\} \quad (y_i < x,\; n \geq 0)$$

$\{4,5,5\} >_{mul} \{3,5,5\} >_{mul} \{3,4,4,4,5\} >_{mul} \{3,4,4,5\} >_{mul}$
$\{3,2,2,2,1,4,5\} >_{mul} \{3,1,0,2,2,1,4,5\} >_{mul} \{3,1,4,5\} >_{mul} \ldots$

Ordres bien-fondés et terminaison (2/3)

- ordre de simplication : $\langle \mathcal{A}(\mathbf{N}), \prec \rangle$
  $\mathcal{A}(\mathbf{N})$ arbres étiquetés par des entiers naturels
  $t = n(t_1, t_2, \cdots t_n) \succ u = m(u_1, u_2, \cdots u_p)$ si $n > m$ et $t \succ u_1,\ t \succ u_2, \cdots t \succ u_p$
  $t = n(\cdots,\ t_i,\ \cdots) \succ u = n(\cdots,\ \cdots)$



Théorie des w.q.o. (*well quasi orderings*) [Kruskal, Nash-Williams, Plaisted, Dershowitz]
Théorie des systèmes de réécriture
Démonstration automatique.

En fait tout ordre $\succ$ sur les arbres étiquetés par un ensemble fini $E \subset \mathbf{N}$ vérifiant :

$$t = n(t_1, t_2, \cdots t_n) \succ u = n(u_1, u_2, \cdots u_p) \text{ si } t_i \succ u_i \text{ pour un } i$$
$$t = n(\cdots,\ t_i,\ \cdots) \succ u = n(\cdots,\ \cdots)$$

est bien fondé.

Ordres bien-fondés et terminaison (3/3)

Exercice 9 Trouver les ordres bien-fondés qui permettent de conclure à la terminaison de ces deux fonctions récursives (fonction 91 de [McCarthy] ou de [Ackermann]).

```
static int ack (int m, int n) {
  if (m == 0)
    return n + 1;
  else
    if (n == 0)
      return ack (m - 1, 1);
    else
      return ack (m - 1, ack (m, n - 1));
} Exécution
```

Indications : considérer l'ordre lexicographique pour Ackermann et l'ordre partiel suivant pour 91 :

$$0 \succ 1 \succ 2 \succ \cdots \succ 98 \succ 99 \succ 100 \succ x$$

où x quelconque tel que $x > 100$.

Exercices

Exercice 10 Montrer la correction de *Quicksort*.

Exercice 11 Montrer la correction de la fusion de listes triées.

Exercice 12 Montrer la correction du test d'acyclicité des graphes par *depth-first-search*.

Exercice 13 Montrer que la terminaison peut être une propriété aussi dure à montrer que la correction.