.

Inf 431 – Cours 4

Exploration
Non déterminisme

jeanjacqueslevy.net

secrétariat de l'enseignement:
Catherine Bensoussan
cb@lix.polytechnique.fr
Aile 00, LIX,
01 69 33 34 67

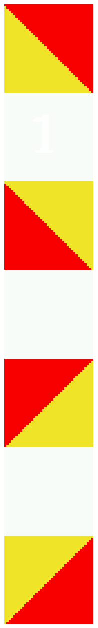
www.enseignement.polytechnique.fr/informatique/IF

Plan

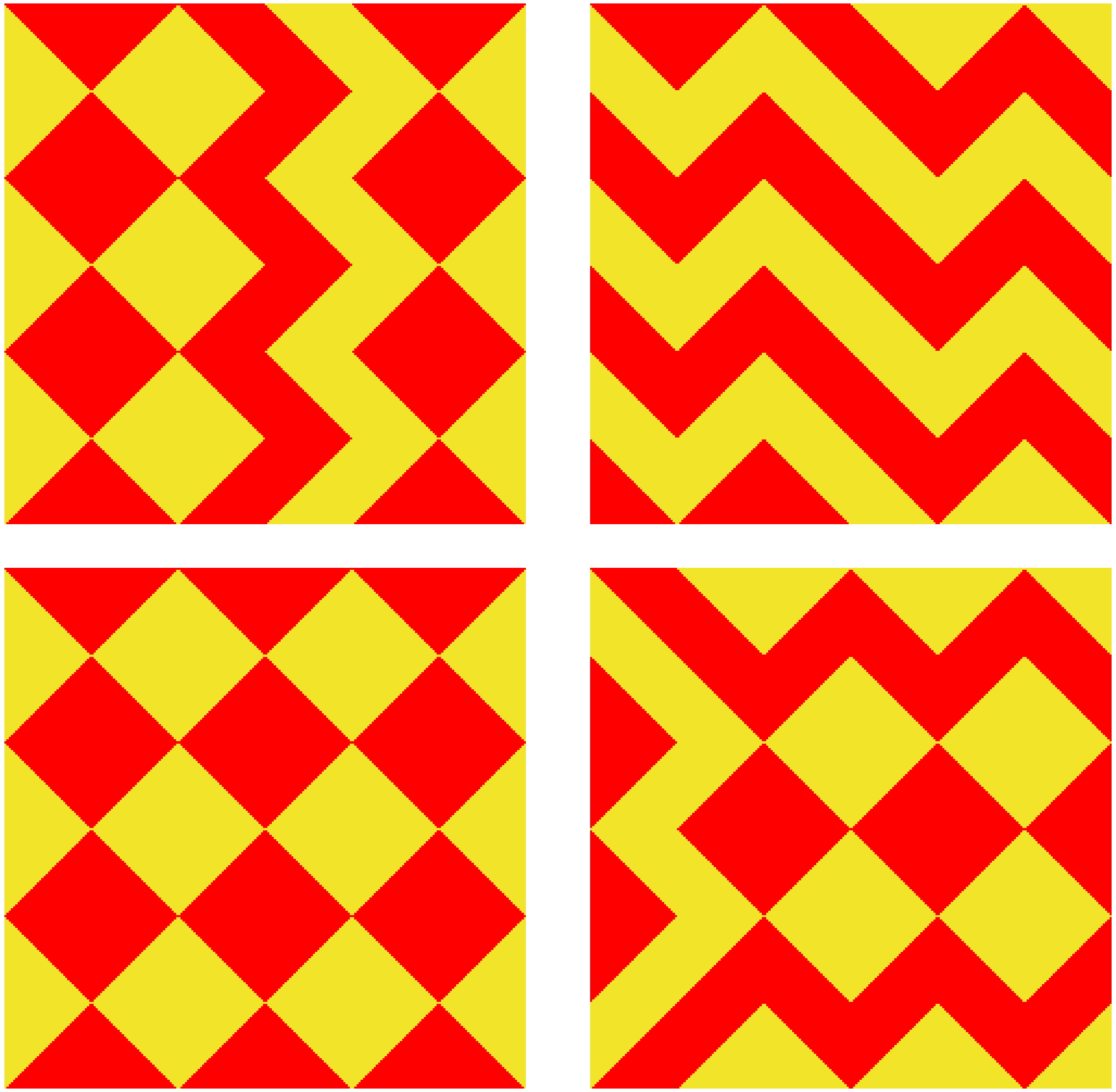
1. *Backtracking*
2. Algorithmes gloutons
3. Programmation dynamique
4. Enumération brutale

[D. Harel], Algorithmics: The Spirit of Computing, Addison-Wesley, 1st edition, 1987 ; 2nd edition, 1992 ; 3rd edition (with Y. Feldman), 2004.

Dominos de Wang (1/2)



$p = 4$



$n = 6$

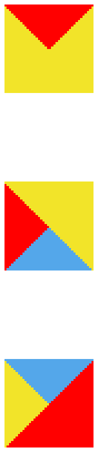
4096

solutions

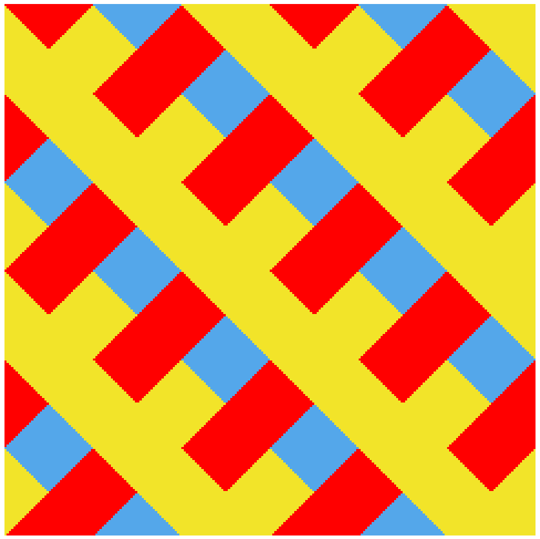
1 2

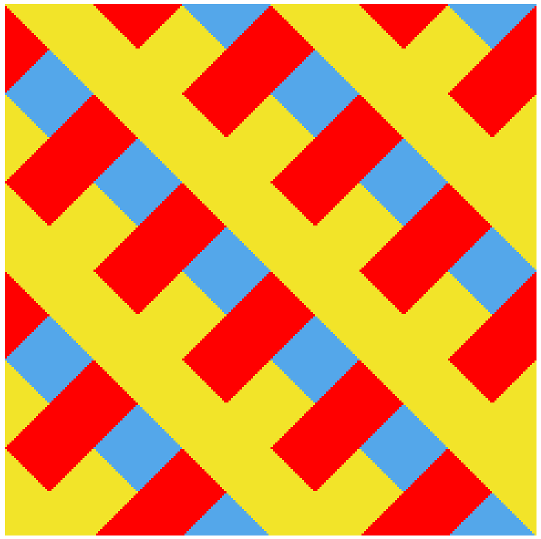
Pavages de carrés $n \times n$ avec p dominos (carrés à bords colorés).

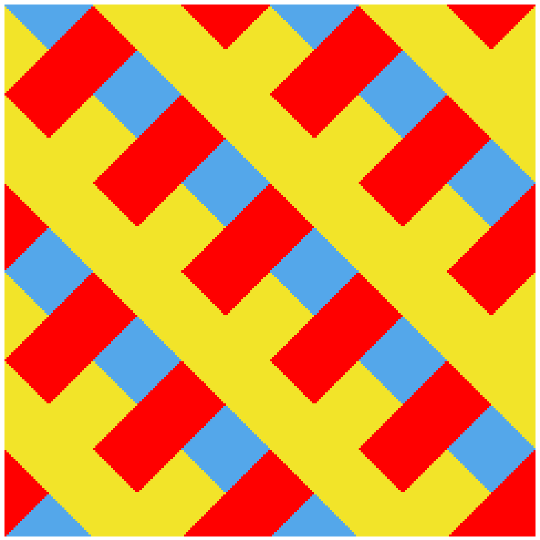
Dominos de Wang (2/2)



$p = 3$







$n = 6$

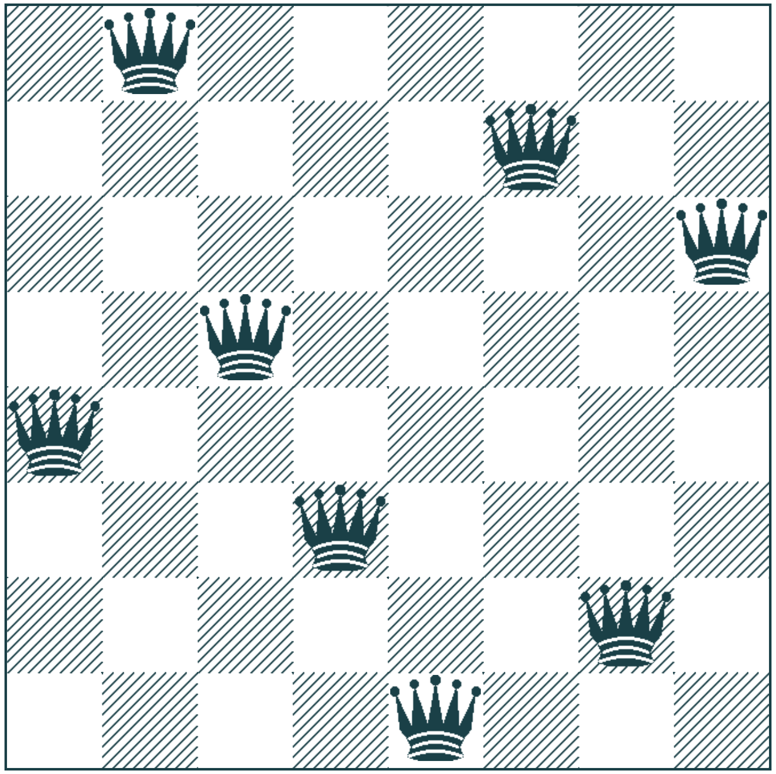
3

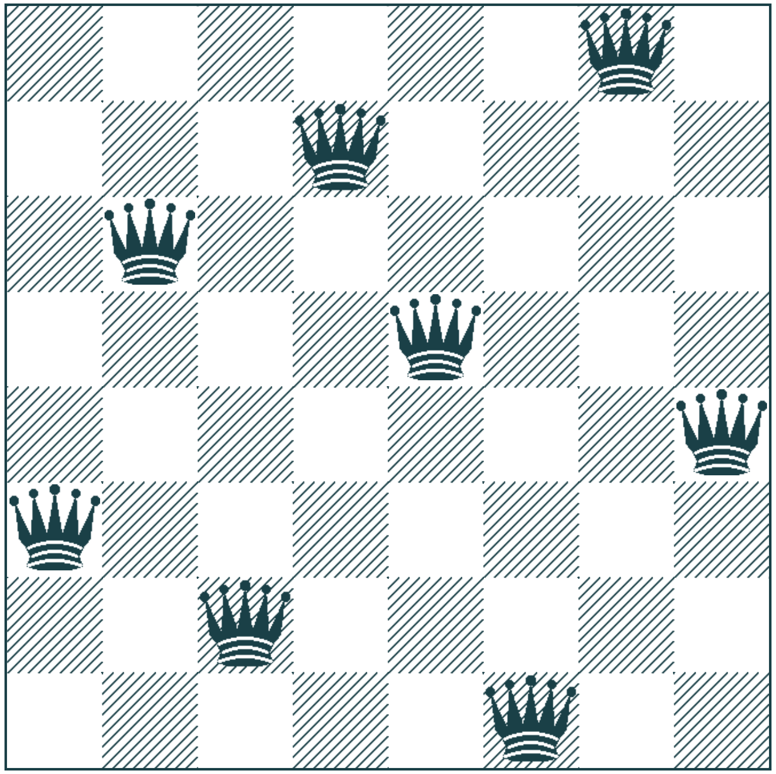
solutions

3 4

Wang $\longrightarrow$ Berger $\longrightarrow$ Penrose

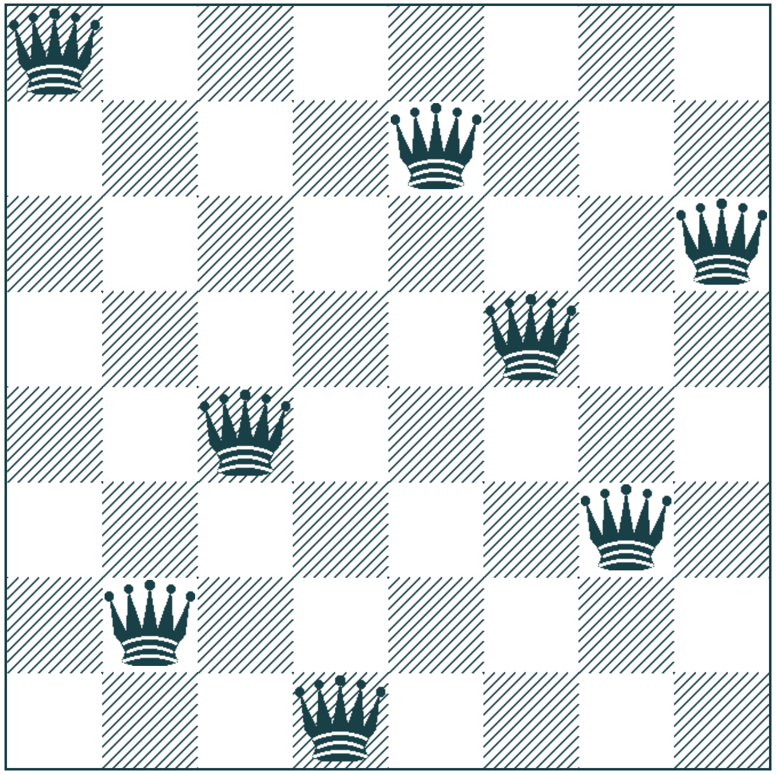
Les 8 reines (1/3)





Mettre 8 reines sur un échiquier sans qu'elles ne soient en prise.

Les 8 reines (2/3)



```
pos[0] = 0
pos[1] = 4
pos[2] = 7
pos[3] = 5
pos[4] = 2
pos[5] = 6
pos[6] = 1
pos[7] = 3
```

`pos[`i`]` $= j$ si la reine de la ligne i est en colonne j.

Les 8 reines (3/3)

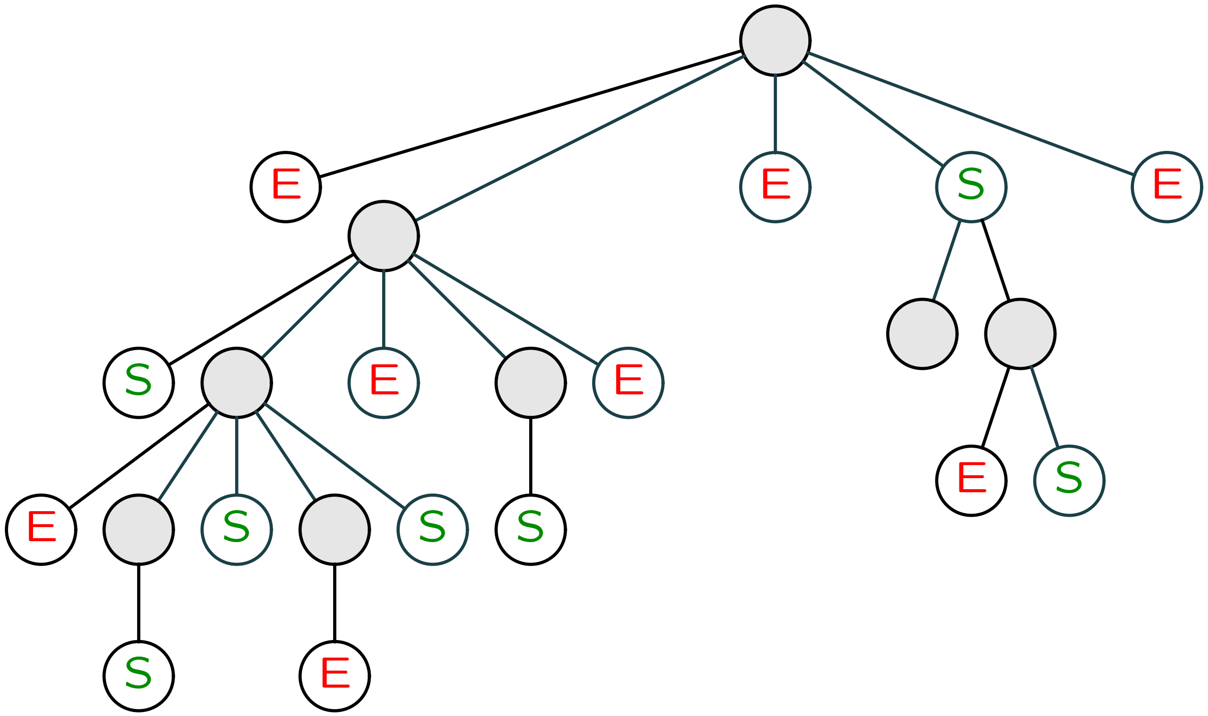
```
static void nReines (int n) {
  int[ ] pos = new int[n]; reines (pos, 0);
}

static void reines (int[ ] pos, int i) {
  if (i >= pos.length) imprimerEchiquier(pos);
  else
    for (int j = 0; j < pos.length; ++j) // backtracking
      if (compatible (pos, i, j)) {
        pos[i] = j;
        reines (pos, i+1);
} }

static boolean compatible (int[ ] pos, int i, int j) {
  for (int k = 0; k < i; ++k)
    if (conflit (i, j, k, pos[k])) return false;
  return true;
}

static boolean conflit (int i1, int j1, int i2, int j2) {
  return (i1 == i2) || (j1 == j2) ||
         (Math.abs (i1 - i2) == Math.abs (j1 - j2));
}
```

Backtracking (1/2)



- Plusieurs choix pour arriver à un nœud succès (S). On peut aussi arriver sur un échec (E).
- Si on parvient à un échec, on fait un retour en arrière (*backtracking*) pour tenter un autre choix.
- Il y a donc différentes stratégies pour arriver à un succès.
  $\Rightarrow$ Plusieurs solutions possibles (non-déterminisme).

Backtracking (2/2)

- Beaucoup de problèmes n'ont pas de meilleure solution (pour l'instant).
- On cherche la solution avec plusieurs retours en arrière possibles.
- On s'arrête dès qu'on trouve une solution.
- Avec un oracle non déterministe, on trouve souvent la solution en temps polynomial. Problèmes NP.

Exercice 1 Donner la complexité non déterministe des dominos de Wang.

Exercice 2 Donner la complexité non déterministe du problème des n reines.

Problèmes NP

La plus grande conjecture de l'informatique = un des 7 problèmes ouverts du millénaire en mathématiques (selon le *Clay Institute*) :

P	$\stackrel{?}{=}$	NP
déterministe	$\stackrel{?}{=}$	non déterministe
polynomial		polynomial

[Cook, 1971]

Exemples de problèmes NP : satisfiabilité des expressions booléennes, 3SAT (satisfiabilité des expressions booléennes en forme normale conjonctive avec 3 variables), isomorphisme de sous-graphes, couverture de graphes, circuits hamiltoniens, voyageur de commerce, sac à dos, etc. [Karp, 1972]

cf. le cours Conception et Analyse des algorithmes en Majeure 2.

3 stratégies d'exploration

- algorithmes gloutons
  une solution locale $\Rightarrow$ une solution globale
  complexité en $O(n)$
- programmation dynamique
  tabulation des solutions partielles $\Rightarrow$ une solution globale
  complexité souvent en $O(n^3)$
- énumération [force brute]
  avec retours en arrière [*backtracking*]
  et éventuelles optimisations [*pruning*]
  complexité en $O(2^n)$

  Remarque : la force brute “améliorée” permet à Deep Blue de battre Garry Kasparov !

Cavalier d'Euler (1/2)

Un cavalier doit parcourir toutes les cases d'un échiquier sans passer deux fois par la même case. Algorithme : aller vers la case où on peut le moins se déplacer, le coup suivant.

```
final static int LIBRE = -1;
final static int[ ] x = {2, 1, -1, -2, -2, -1, 1, 2};
final static int[ ] y = {1, 2, 2, 1, -1, -2, -2, -1};

static void cavalier (int[ ][ ] m, int i, int j) {
  int coup = 0; int i0, j0;
  do {
    m[i][j] = coup++;
    i0 = i; j0 = j;
    int min = Integer.MAX_VALUE;
    for (int k = 0; k < x.length; ++k) {
      int n = nbCoupsDe (m, i0+x[k], j0+y[k]);
      if (min > n) {
        i = i0+x[k]; j = j0+y[k];
        min = n;
    } }
  } while (i != i0 || j != j0);
}
```

Cavalier d'Euler (2/2)

```
static int nbCoupsDe (int[ ][ ] m, int i, int j) {
  if ( !dansEchiquier (m, i, j) || m[i][j] != LIBRE )
    return Integer.MAX_VALUE;
  else {
    int res = 0;
    for (int k = 0; k < x.length; ++k) {
      int i1 = i+x[k], j1 = j+y[k];
      if ( dansEchiquier (m, i1, j1) && m[i1][j1] == LIBRE )
        ++res;
    }
    return res;
} }

static boolean dansEchiquier(int[ ][ ] m, int i, int j) {
  return 0 <= i && i < m.length && 0 <= j && j < m[0].length;
}
```

Exemple d'algorithme glouton.

Exercice 3 Montrer que cet algorithme marche pour toutes les cases de départ sauf une.

Programmation dynamique (1/2)

- La programmation dynamique [`Bellman 57`] consiste à tabuler des résultats intermédiaires pouvant intervenir dans le résultat de l'optimisation à effectuer, afin d'éviter la duplication de calculs (programmation dynamique, *bang-bang control*, etc)
- Souvent les résultats intermédiaires consistent à calculer une généralisation du résultat.
- Exemple (cf. cours 3) du plus court chemin entre tous les sommets d'un graphe. `[Floyd-Warshall]`

Programmation dynamique (2/2)

La fonction de [Fibonacci]

```
int fib (int n) {
  if (n < 2) return n; else return fib (n-2) + fib (n-1);
}
```

se calcule plus rapidement en tabulant :

```
int fib (int n) {
  int[ ] tab = new int[n+1];
  tab[0] = 0; tab[1] = 1;
  for (int i = 2; i <= n; ++i)
    tab[i] = tab[i-2] + tab[i-1];
  return tab[n];
}
```

(On peut même ne garder que les deux dernières valeurs !)

C'est un bel exemple de programmation dynamique.

Plus longue sous-séquence commune (1/2)

Plus longue sous-séquence commune entre deux chaînes de caractères $u, v \in \Sigma^*$ (ϵ chaîne vide).

FIN	$ssc(u, \epsilon) = ssc(\epsilon, u) = \epsilon$
NORD_OUEST	$ssc(ua, va) = ssc(u, v)a$
OUEST NORD	$ssc(ua, vb) = \begin{cases} ssc(ua, v) \text{ si } \Vert ssc(ua, v) \Vert \geq \Vert ssc(u, vb) \Vert \\ ssc(u, vb) \text{ sinon} \end{cases}$

Commande Unix `diff` ; séquençage de l'ADN

	ϵ	a	a	a	c
ϵ					
b		←	←	←	←
a		↖	↖	↖	←
c		↑	←	←	↖
b		↑	←	←	↑

pred

	ϵ	a	a	a	c
ϵ	0	0	0	0	0
b	0	0	0	0	0
a	0	1	1	1	1
c	0	1	1	1	2
b	0	1	1	1	2

longueur

Plus longue sous-séquence commune (2/2)

```
final static int FIN = 0, NORD_OUEST = 1, OUEST = 2, NORD = 3;

static int[ ][ ] plusLongueSSC (String u, String v) {
  int m = u.length(); int n = v.length();
  int[ ][ ] longueur = new int[m][n], pred = new int[m][n];
  for (int i = 0; i < m+1; ++i) {longueur[i][0] = 0; pred[i][0] = FIN; }
  for (int j = 0; j < n+1; ++j) {longueur[0][j] = 0; pred[0][j] = FIN; }

  for (int i = 1; i < m+1; ++i)
    for (int j = 1; j < n+1; ++j)
      if (u.charAt(i-1) == v.charAt(j-1)) {
        longueur[i][j] = 1 + longueur[i-1][j-1]; pred[i][j] = NORD_OUEST;
      } else if (longueur[i][j-1] >= longueur[i-1][j]) {
        longueur[i][j] = longueur[i][j-1]; pred[i][j] = OUEST;
      } else {
        longueur[i][j] = longueur[i-1][j]; pred[i][j] = NORD;
      }
   return pred;
}
```

Enumération de chemins (1/2)

Enumérer les chemins élémentaires dans un graphe (jamais deux fois un même sommet).

```
final static int BLANC = 0, GRIS = 1, NOIR = 2;

static void tousLesChemins (Graphe g) {
  int n = g.succ.length; int[ ] couleur = new int[n];
  for (int x=0; x < n; ++x) couleur[x] = BLANC;
  for (int x=0; x < n; ++x) tousLesCheminsDe (g, x, couleur, null);
}

static void tousLesCheminsDe (Graphe g, int x, int[ ] couleur, Liste c) {
  couleur[x] = GRIS;
  c = new Liste (x, c); System.out.println (c);
  for (Liste ls = g.succ[x]; ls != null; ls = ls.suivant) {
    int y = ls.val;
    if (couleur[y] != GRIS)
      tousLesCheminsDe (g, y, couleur, c);
  }
  couleur[x] = BLANC; // ← Le changement
}
```

Enumération de chemins (2/2)

```
class Liste {
  int val; Liste suivant;
  Liste (int v, Liste x) {val = v; suivant = x; }

  public String toString() {
    if (suivant == null) return "" + val;
    else return "" + suivant + " " + val ;
  }
}
```

On peut aussi écrire

```
  public String toString() {
    return (suivant == null ? "" : suivant + " ") + val ;
```

Affaire de goût ! !

Enumération des chemins simples

=

légère modification sur `dfs`.

Exercices

Exercice 4 Enumérer les chemins simples en largeur d'abord.

Exercice 5 Tester si un graphe contient un circuit hamiltonien. (Circuit passant par tous les sommets sans passer 2 fois par le même).

Exercice 6 Même question dans un graphe non dirigé.

Exercice 7 Un tour de Euler dans un graphe dirigé consiste à passer par tous les arcs d'un graphe en ne passant jamais deux fois par le même arc. Ecrire un programme pour tester l'existence d'un tel tour.

Exercice 8 Même problème dans un graphe non dirigé.

Exercice 9 Complexité de SSC ?

Exercice 10 Comment implémenter la commande `diff` du système Unix ?

Exercice 11 L'associativité de la multiplication de matrices permet de multiplier n matrices $M_0 M_1 \ldots M_{n-1}$ sans préciser le parenthésage. Pourtant, cela peut faire varier le nombre de multiplications scalaires à effectuer. Donner un algorithme qui utilise la programmation dynamique pour trouver l'ordre optimal.